文章编号:1000-4939(2024)06-1299-07

砂岩单轴压缩黏弹塑性分数阶蠕变模型研究

何峰,杨松

(辽宁工程技术大学力学与工程学院,123000 阜新)

摘 要:为建立参数少、计算简便、蠕变过程描述准确的蠕变模型,基于岩石力学及分数阶理论,引入分数阶软体元件,将其与弹性、塑性、黏性元件相结合,得到了创新的黏弹塑性蠕变模型,推导蠕变模型的本构方程,并对砂岩单轴压缩蠕变试验数据进行参数辨识、曲线拟合和对比分析,进而对蠕变模型进行验证。结果表明:引入的分数阶软体元件应变随时间呈幂函数趋势增长,可表征非线性蠕变阶段,详细地分析了弹性元件、塑性元件、黏性元件及分数阶软体元件在蠕变过程中不同阶段发挥的作用;推导得到模型在 $\dot{\varepsilon}(t\to\infty)=0(\sigma<\sigma_s)$、$\dot{\varepsilon}(t\to\infty)>0(\sigma<\sigma_s)$、$\dot{\varepsilon}(t\to\infty)>0(\sigma\geqslant\sigma_s)$ 情况下的本构方程,以及计算简便的参数辨识方法,试验数据拟合曲线的拟合度均在 0.9 以上,验证了蠕变模型的合理性和科学性;所建立的六参数黏弹塑性分数阶模型能全面地描述蠕变的整个过程,并且与其他模型对比模型参数更少、计算量更小。

关键词:分数阶理论;蠕变模型;参数辨识;非线性拟合

中图分类号:TU45 **文献标志码:**A **DOI:**10.11776/j.issn.1000-4939.2024.06.009

Study on the viscoelastic-plastic fractional creep model of sandstone in uniaxial compression

HE Feng, YANG Song

(School of Mechanics and Engineering, Liaoning Technical University, 123000 Fuxin, China)

Abstract: In order to establish a creep model with few parameters, simple calculation and accurate description of the creep process, based on rock mechanics and fractional order theory, fractional-order soft components were introduced and combined with elastic, plastic and viscous components, and an innovative viscous model was obtained. The elastic-plastic creep model was used to derive the constitutive equation of the creep model, and the parameter identification and curve fitting and comparative analysis were performed on the sandstone uniaxial compression creep test data, and then the model was verified. The results showed that the strain of the introduced fractional-order soft element increases with time as a power function, which can characterize the nonlinear creep stage. The creep process of elastic element, plastic element, viscous element and fractional-order soft element was analyzed in detail. The constitutive equations of the model under three different conditions $\dot{\varepsilon}(t\to\infty)=0(\sigma<\sigma_s)$, $\dot{\varepsilon}(t\to\infty)>0(\sigma<\sigma_s)$, $\dot{\varepsilon}(t\to\infty)>0$

收稿日期:2022-03-18 **修回日期:**2022-11-23
基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 52174143)
通信作者:杨松。E-mail:2411423170@qq.com
引用格式:何峰,杨松. 砂岩单轴压缩黏弹塑性分数阶蠕变模型研究[J]. 应用力学学报,2024,41(6):1299-1305.
HE Feng, YANG Song. Study on the viscoelastic-plastic fractional creep model of sandstone in uniaxial compression[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2024, 41(6):1299-1305.

($\sigma \geqslant \sigma_s$) and the parameter identification method with simple calculation were derived, and the fitting degree of the fitting curve of the test data was above 0.9. The rationality and scientificity of the creep model were verified. The established six-parameter viscoelastic-plastic fractional order model could comprehensively describe the whole process of creep, and compared with other models, the model required fewer parameters and less computation.

Key words: fractional theory; creep model; parameter identification; nonlinear fitting

岩石蠕变本构模型的研究一直以来都是热点问题,得到一个参数少、计算方便、蠕变过程描述准确的模型是研究的最终目的[1-4]。常见的本构模型有Maxwell 模型[5]、Kelvin 模型[6]、Bingham 模型[7-9]和 Burgers 模型[10-11],目前大量学者基于此类模型得到了一些研究成果。刘新喜等[12]根据损伤理论,在西原模型中引入损伤变量及黏塑性修正系数,提出了描述蠕变全过程的变参数模型;张亮亮等[13]提出改进的蠕变模型对表征岩石的加速蠕变阶段有较好效果;汪妍妍等[14]将黏塑性模型引入 Burgers 模型中,得到了六元件蠕变模型,描述岩石蠕变的全过程;王游等[15]通过引入非线性函数和损伤黏性元件,得到可表征加速蠕变阶段的非线性损伤西原体模型;梁荣康等[16]采用修正的 Singh-Mitchell 模型,并进行室内直剪试验对软土的蠕变特性进行了深入分析;赵晨阳等[17]基于 Kachanov-Rabotnov 蠕变损伤理论建立了六元件的非线性黏弹塑性蠕变模型,实现了对含软弱结构面岩体加速蠕变阶段的模拟;张佳[18]将西原体模型蠕变参数转化为关于时间的函数,构建出一种新型的非定常分数阶蠕变模型;钟祖良等[19]提出了指数型损伤变量,并将传统 Burgers 蠕变模型改进为能够描述加速蠕变段的全损伤蠕变模型;杨珂等[20]将 Burgers 模型中串联牛顿体的黏滞系数修正为与应力、时间相关的函数,基于损伤理论和 Lemaitre 应变等价性假说,得到了创新的损伤体模型;刘长明等[21]提出一种新型的确定蠕变参数的方法,得到考虑应力状态对蠕变参数产生劣化影响的改进蠕变模型。

以上学者的研究成果对蠕变模型的研究均具有重要意义,但仍存在计算求解困难,元件串联太多导致参数反演复杂等不足。殷德顺等[22]提出的分数阶软体元件[23]能够很好地反映蠕变现象中的非线性特征,分数阶软体元件的应变与时间呈幂函数关系,这与岩石蠕变过程中的初期蠕变阶段和加速蠕变阶段相吻合,且该元件的参数较少,计算方便。

故本研究基于岩石蠕变表现的弹性、塑性、黏性等特征,将软体元件与弹性、塑性、黏性元件相结合,建立一个创新的黏弹塑性蠕变模型,推导出该模型在不同状态下的本构方程,并给出各模型参数的反演方法,通过对砂岩单轴压缩蠕变试验数据进行参数辨识和曲线拟合对蠕变模型进行验证。

1 蠕变模型基本元件

1.1 分数阶理论

随着分数阶微积分在各个领域的应用,衍生出了不同定义下的分数阶微积分,其中 Riemann-Liouville[24-26]分数阶微积分是目前运用最为广泛,且数学建模中不需考虑初始条件,方便模型推导和数值计算,本研究运用 Riemann-Liouville 分数阶微积分进行研究。对于函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的 α 阶积分定义为

$$\frac{\mathrm{d}^{-\alpha}[f(x)]}{\mathrm{d}x^{-\alpha}} = {}_{x_0}D_x^{-\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{\alpha-1}f(t)\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

α 阶导数定义为

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}[f(x)]}{\mathrm{d}x^{\alpha}} = {}_{x_0}D_x^{\alpha}f(x) = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}[{}_{x_0}D_x^{-(m-\alpha)}f(x)] = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\int_{x_0}^{x}(x-t)^{m-\alpha-1}f(x-t)\,\mathrm{d}t\right] \tag{2}$$

式中:α 为分数阶阶数($0<\alpha$ 且 $m-1<\alpha<m$, $m\in\mathbf{N}^*$);D 的左下角标和右下角标分别代表积分的下界和上界;Γ 为伽玛函数,$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 2\int_0^{\infty}t^{2z-1}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$,$\Gamma(1+z)=z\Gamma(z)$ $(z\in\mathbf{N}^*)$,$\mathrm{Re}(z)>0$。

1.2 基本元件

由于岩石具有弹性、黏性、塑性等特点,为建模

方便,将岩石具有的特点运用元件表示。目前存在的蠕变模型有很多,其中大部分模型是在下列各元件的基础上演化而来,如图 1 所示。

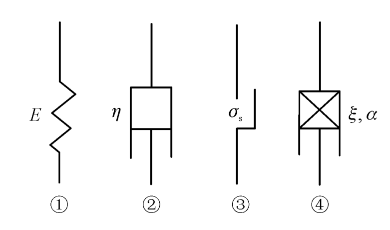


图 1　蠕变模型基本元件

Fig. 1　Elements of creep model

①弹性元件遵循胡克定律,本构方程为 $\sigma(t) = E \cdot \varepsilon(t)$,E 为弹性模量。

②黏性元件遵循牛顿黏性定律,本构方程为 $\sigma(t) = \eta \cdot \dfrac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}$,η 为黏性系数。

③塑性元件,当岩体所受荷载超出其屈服强度,便表现出塑性,本构方程为 $\begin{cases}\varepsilon = 0, \sigma < \sigma_s \\ \varepsilon \to \infty, \sigma \geqslant \sigma_s\end{cases}$,$\sigma_s$ 为屈服强度。

④引进的分数阶软体元件[22],本构方程为

$$\sigma(t) = \xi \frac{\mathrm{d}^{\alpha}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t^{\alpha}}, (m \leqslant \alpha \leqslant m + 1, m \in \mathbf{N}^*) \tag{3}$$

式中,ξ 是软体元件的固有系数。

当 $\alpha = 1$ 时,$\sigma(t) = \xi \cdot \dot{\varepsilon}(t)$,软体元件表现为黏性,此时相当于理想流体;当 $\alpha = 0$ 时,$\sigma(t) = \xi \cdot \varepsilon(t)$,软体元件表现为弹性,此时相当于理想固体。

当 $\sigma(t) = \mathrm{const}$ 时,即应力不变的情况下,元件描述流变行为的蠕变,式(3)两侧对 t 进行积分,根据分数阶微积分理论,计算可得软体元件的本构方程为

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{\xi} \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1 + \alpha)}, (m \leqslant \alpha \leqslant m + 1, m \in \mathbf{N}^*) \tag{4}$$

式中,σ、ξ、$\Gamma(1 + \alpha)$ 为常量,应变变化趋势只与 α 相关。由此可以得到,软体元件的应变与时间呈幂函数关系。作出不同 α 值的应变曲线(图 2),随着 α 值的增大,应变随时间变化越快。当 $0 < \alpha < 1$ 时,曲线与初始蠕变阶段变化趋势相近;当 $\alpha = 1$ 时,曲线与等速蠕变阶段变化趋势相近;当 $\alpha > 1$ 时,曲线与加速蠕变阶段变化趋势相近。由此可知,该元件能表示不同条件下的岩石蠕变特征。

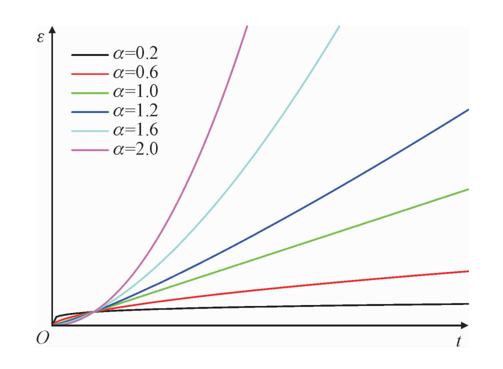


图 2　不同 α 值软体元件蠕变曲线

Fig. 2　Creep curves of software components with different α values

2　黏弹塑性蠕变模型

蠕变模型所描述的流变特性表现为:当施加应力小于屈服应力时,具有固体的性质;在应力超过屈服应力之后,表现出液体的性质,产生流动。为得到参数少和描述准确的模型,建立如下黏弹塑性蠕变模型,如图 3 所示。模型中包括 5 个元件,每个元件在不同的蠕变阶段分别发挥各自的作用:岩体发生的瞬时应变由弹性元件①描述;进入初期蠕变阶段,应变与时间表现为非线性关系,整体表现为上凸的趋势,因为分数阶元件应变与时间遵循幂函数关系,此阶段由分数阶元件②描述;如果施加应力未达到岩石的屈服强度,则进入稳定蠕变阶段,应变随时间呈线性上升,岩石表现为黏性,此阶段由黏性元件③描述;如果施加应力达到岩石的屈服强度,则进入加速蠕变阶段,应变与时间表现为非线性关系,整体表现为下凹的趋势,因为分数阶元件应变与时间遵循幂函数关系,此阶段由分数阶元件⑤描述。

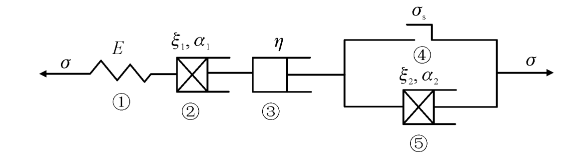


图 3　黏弹塑性蠕变模型

Fig. 3　Viscoelastic-plastic rheological model

蠕变模型本构方程的推导,遵循元件串并联的原则[27-28]:元件串联时,各元件应力相等,总应变等于各元件应变之和;元件并联时,各元件应变相等,总应力等于各元件应力之和。根据岩石蠕变全过程的特点,本构方程共分为 3 种情况,如图 4 所示。

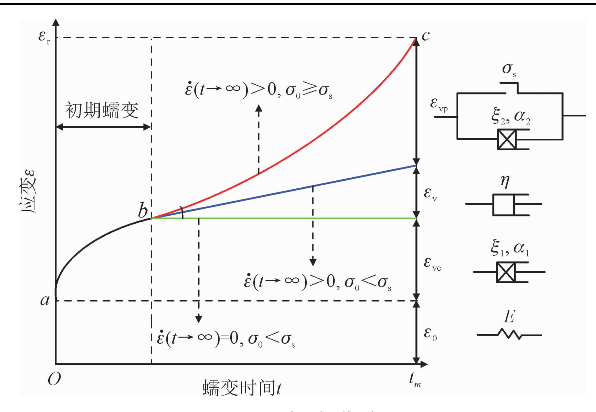


图4 蠕变曲线

Fig. 4 Creep curve

建立的蠕变模型满足以下条件。

1）当 $\dot{\varepsilon}(t\to\infty)=0,\sigma<\sigma_s$ 时，模型相当于弹性元件与分数阶软体元件串联，此时岩石所受到的应力未达到其屈服强度，变形处于初期蠕变阶段。此时改进蠕变模型的本构方程为

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma}{E}+\frac{\sigma}{\xi_1}\frac{t^{\alpha_1}}{\Gamma(1+\alpha_1)} \tag{5}$$

式中：σ 为施加应力；E 为弹性模量。

2）当 $\dot{\varepsilon}(t\to\infty)>0,\sigma<\sigma_s$ 时，模型相当于弹性元件、分数阶软体元件、黏性元件串联，蠕变进入等速蠕变阶段，此时改进蠕变模型的本构方程为

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma}{E}+\frac{\sigma}{\xi_1}\frac{t^{\alpha_1}}{\Gamma(1+\alpha_1)}+\frac{\sigma}{\eta}t \tag{6}$$

3）当 $\dot{\varepsilon}(t\to\infty)>0,\sigma\geqslant\sigma_s$ 时，模型中所有元件参与蠕变过程。此时蠕变方程为

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma}{E}+\frac{\sigma}{\xi_1}\frac{t^{\alpha_1}}{\Gamma(1+\alpha_1)}+\frac{\sigma}{\eta}t+\frac{\sigma-\sigma_s}{\xi_2}\frac{t^{\alpha_2}}{\Gamma(1+\alpha_2)} \tag{7}$$

结合式(5)～(7)，得到分数阶黏弹塑性蠕变模型的总表达式为

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}\dfrac{\sigma}{E}+\dfrac{\sigma}{\xi_1}\dfrac{t^{\alpha_1}}{\Gamma(1+\alpha_1)}, \\ \quad(\dot{\varepsilon}(t\to\infty)=0,\sigma<\sigma_s) \\ \dfrac{\sigma}{E}+\dfrac{\sigma}{\xi_1}\dfrac{t^{\alpha_1}}{\Gamma(1+\alpha_1)}+\dfrac{\sigma}{\eta}t, \\ \quad(\dot{\varepsilon}(t\to\infty)>0,\sigma<\sigma_s) \\ \dfrac{\sigma}{E}+\dfrac{\sigma}{\xi_1}\dfrac{t^{\alpha_1}}{\Gamma(1+\alpha_1)}+\dfrac{\sigma}{\eta}t+ \\ \quad\dfrac{\sigma-\sigma_s}{\xi_2}\dfrac{t^{\alpha_2}}{\Gamma(1+\alpha_2)}, \\ \quad(\dot{\varepsilon}(t\to\infty)>0,\sigma\geqslant\sigma_s)\end{cases} \tag{8}$$

3 参数辨识及模型验证

3.1 参数辨识

1）E、ξ_1、α_1 的确定

对初期蠕变数据进行非线性拟合，拟合函数类型为

$$f(t)=a_0t^{b_0}+c_0 \tag{9}$$

对应式(8)～(9)，满足

$$\begin{cases}f(t)=\varepsilon(t) \\ a_0=\dfrac{\sigma}{\xi_1\cdot\Gamma(1+\alpha_1)} \\ b_0=\alpha_1 \\ c_0=\dfrac{\sigma}{E}\end{cases} \tag{10}$$

联立解得

$$\begin{cases}E=\dfrac{\sigma}{c_0} \\ \alpha_1=b_0 \\ \xi_1=\dfrac{\sigma}{a_0\cdot\Gamma(1+b_0)}\end{cases} \tag{11}$$

2）η、ξ_2、α_2 的确定

对等速蠕变阶段数据进行线性拟合，拟合函数类型为

$$f(t)=a_1t+c_1 \tag{12}$$

式中

$$\begin{cases}f(t)=\varepsilon(t) \\ a_1=\dfrac{\sigma}{\eta}\end{cases} \tag{13}$$

联立解得

$$\eta=\frac{\sigma}{a_1} \tag{14}$$

对加速蠕变数据进行非线性拟合，拟合函数类型为

$$f(t)=a_2t^{b_2}+c_2 \tag{15}$$

对应式(8)～(9)，满足

$$\begin{cases}f(t)=\varepsilon(t) \\ a_2=\dfrac{\sigma-\sigma_s}{\xi_2\cdot\Gamma(1+\alpha_2)} \\ b_2=\alpha_2\end{cases} \tag{16}$$

联立解得

$$\begin{cases} \alpha_2 = b_2 \\ \xi_2 = \dfrac{\sigma - \sigma_s}{a_2 \cdot \Gamma(1 + b_2)} \end{cases} \tag{17}$$

3.2　模型验证

为验证改进蠕变模型的科学性和有效性,对模型进行参数辨识。试验数据来自砂岩单轴压缩蠕变试验,试件取自同一块完整岩石,经过取芯、切割、打磨等过程,得到 50 mm × 100 mm(直径 × 高)的标准圆柱试件,试件含水率通过浸水试验确定,测定结果如表 1 所示。加载方式为轴压分级加载,加载速率为 0.2 MPa/s。详细试验过程见文献[29],文献中测得的长期强度为 70 MPa,不同轴向应力下的试验数据曲线如图 5 所示。

表 1　含水率与水化时间表

Tab. 1　Water content and hydration schedule

参数	含水率/%			
	0	0.63	1.38	2.74
水化时间/h	0	15	30	45

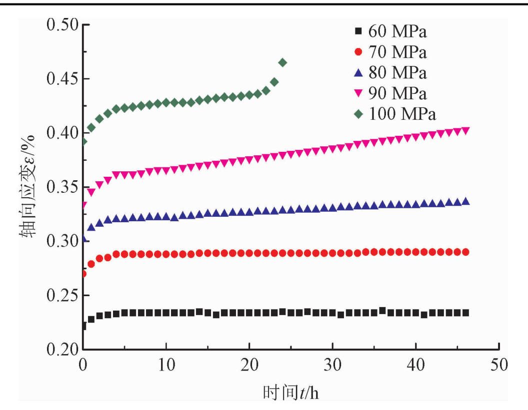


图 5　砂岩单轴压缩蠕变曲线[29]

Fig. 5　Uniaxial compression creep curves of sandstone[29]

采用 3.1 中的参数反演方法,进行蠕变参数反演。

当施加应力为 60 MPa 时,$\dot{\varepsilon}(t\to\infty) = 0, \sigma < \sigma_s$,初始蠕变阶段拟合曲线为

$$\varepsilon(t) = 0.126\,53 + 0.101\,64t^{0.034\,5}, R^2 = 0.981;$$

由式(11)可得

$$\begin{cases} E = \dfrac{\sigma}{c_0} = = 47.42\ \text{GPa} \\ \alpha_1 = b_0 = 0.034\,5 \\ \xi_1 = \dfrac{\sigma}{a_0 \cdot \Gamma(1 + b_0)} = 60.18\ \text{GPa} \cdot \text{h}^{\alpha_1} \end{cases}$$

以下参数反演同上述步骤计算。当施加应力为 70 MPa 时,$\dot{\varepsilon}(t\to\infty) = 0, \sigma < \sigma_s$,初始蠕变阶段拟合曲线为

$$\varepsilon(t) = 0.167\,97 + 0.111\,29t^{0.053\,1}, R^2 = 0.907$$

当施加应力为 80 MPa 时,$\dot{\varepsilon}(t\to\infty) > 0, \sigma < \sigma_s$,初始蠕变阶段拟合曲线为

$$\varepsilon(t) = 0.176\,29 + 0.135\,75t^{0.042\,6}, R^2 = 0.976$$

等速蠕变阶段拟合曲线为

$$\varepsilon(t) = 0.318\,59 + 3.791\,91 \times 10^{-4} t, R^2 = 0.989$$

当施加应力为 90 MPa 时,$\dot{\varepsilon}(t\to\infty) > 0, \sigma < \sigma_s$,初始蠕变阶段拟合曲线为

$$\varepsilon(t) = 0.132\,92 + 0.213\,08t^{0.047\,5}, R^2 = 0.964$$

等速蠕变阶段拟合曲线为

$$\varepsilon(t) = 0.355\,82 + 1.02 \times 10^{-3} t, R^2 = 0.998$$

当施加应力为 100 MPa 时,$\dot{\varepsilon}(t\to\infty) > 0, \sigma \geqslant \sigma_s$,初始蠕变阶段拟合曲线为

$$\varepsilon(t) = 0.137\,03 + 0.268\,13t^{0.041\,8}, R^2 = 0.987$$

等速蠕变阶段拟合曲线为

$$\varepsilon(t) = 0.419\,56 + 7.602\,94 \times 10^{-4} t, R^2 = 0.978$$

加速蠕变阶段拟合曲线为

$$\varepsilon(t) = 0.428\,91 + 2.132\,7 \times 10^{-13} t^{8.079\,6}, R^2 = 0.907$$

反演结果如表 2 所示。

表 2　蠕变参数反演结果

Tab. 2　Inversion results of creep parameters

轴向应力/ MPa	E /GPa	ξ_1/(GPa · h$^{\alpha_1}$)	ξ_2/(GPa · h$^{\alpha_2}$)	η/(GPa · h)	α_1	α_2
60	27.15	60.18	–	–	0.034 5	–
70	25.93	64.71	–	–	0.053 1	–
80	26.49	60.32	–	210.97	0.042 6	–
90	26.95	43.32	–	88.24	0.047 5	–
100	25.51	38.17	2.38×10^{10}	131.53	0.041 8	8.079 6

模型拟合结果如图 6 所示。由图可知,建立的蠕变模型拟合曲线符合岩石蠕变的 3 个阶段,初期蠕变阶段呈幂函数增长趋势,等速蠕变阶段呈一次函数增长趋势,加速蠕变阶段呈幂函数增长趋势,函

数解析式均与所建立模型相符合，且拟合相关性系数均大于0.9，与传统的 Bingham 模型相比，本研究建立模型的拟合度更高。此模型参数少、求解方便，包含了黏性、弹性、塑性和分数阶软体元件，全面地描述了岩石蠕变的整个过程，是目前诸多蠕变模型所不具备的。

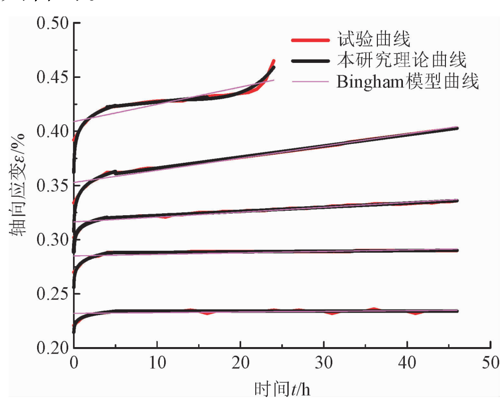


图 6　模型拟合对比结果

Fig. 6　The result of model fitting comparison

将模型与文献[30]的蠕变模型进行对比，本研究所建立的蠕变模型参数为 6 个，相比文献[30]要少，并且给出了详细地参数反演过程。对岩石在蠕变过程中 3 种情况的本构方程均进行了推导与拟合，相比文献[30]要更为完善。综上所述，本研究所建立的蠕变模型是合理有效的。

4　结　论

1)针对目前蠕变模型存在参数多、计算困难和描述不准确等问题，引入分数阶软体元件来描述初期和加速蠕变的非线性特征，将其与黏性元件、弹性元件和塑性元件相结合，提出了创新的六参数多元件蠕变模型。

2)通过 Riemann-Liouville 分数阶微积分和蠕变模型串并联原则，给出了模型在 $\dot{\varepsilon}(t\rightarrow\infty)=0(\sigma<\sigma_s)$、$\dot{\varepsilon}(t\rightarrow\infty)>0(\sigma<\sigma_s)$、$\dot{\varepsilon}(t\rightarrow\infty)>0(\sigma\geqslant\sigma_s)$ 情况下的本构方程。通过实验数据计算、曲线拟合和对比分析的方法得到改进蠕变模型参数 E、ξ_1、ξ_2、η、α_1、α_2；并且曲线拟合度均高于0.9，验证了所建立模型的合理性和科学性。

3) 所建立的六参数黏弹塑性分数阶模型能全面地描述蠕变的整个过程，特别是非线性蠕变阶段，与其他模型对比，该模型参数和计算量更少，对研究煤岩蠕变本构模型具有一定的参考意义。

参考文献：

[1] GASC-BARBIER M, CHANCHOLE S, BÉREST P. Creep behavior of bure clayey rock[J]. Applied clay science, 2004, 26(1): 449-458.

[2] SHAO J F, ZHU Q Z, SU K. Modeling of creep in rock materials in terms of material degradation[J]. Computers and geotechnics, 2003, 30(7): 549-555.

[3] MUNSON D E. Constitutive model of creep in rock salt applied to underground room closure[J]. International journal of rock mechanics and mining sciences, 1997, 34(2): 233-247.

[4] 孙钧. 岩石流变力学及其工程应用研究的若干进展[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(6): 1081-1106.
SUN Jun. Rock rheological mechanics and its advance in engineering applications[J]. Chinese journal of rock mechanics and engineering, 2007, 26(6): 1081-1106(in Chinese).

[5] 冯希金，危银涛，李志超，等. 未硫化橡胶非线性粘弹性本构模型研究[J]. 工程力学, 2016, 33(7): 212-219.
FENG Xijin, WEI Yintao, LI Zhichao, et al. Research on nonlinear viscoelastic constitutive model for uncured rubber[J]. Engineering mechanics, 2016, 33(7): 212-219(in Chinese).

[6] 宋彦琦，李小龙，马宏发，等. 基于有损伤体元件的广义 Kelvin 模型蠕变全过程探究[J]. 应用数学和力学, 2021, 42(6): 637-644.
SONG Yanqi, LI Xiaolong, MA Hongfa, et al. Research on the whole creep process of the generalized Kelvin model based on damaged body elements[J]. Applied mathematics and mechanics, 2021, 42(6): 637-644(in Chinese).

[7] HABIB A O, AIAD I, EL-HOSINY F I, et al. Studying the impact of admixtures chemical structure on the rheological properties of silica-fume blended cement pastes using various rheological models[J]. Ain Shams engineering journal, 2021, 12(2): 1583-1594.

[8] RAFIQ T, MUSTAFA M. BÖdewadt flow of Bingham fluids over a non-isothermal permeable disk with viscous dissipation effects[J]. Alexandria engineering journal, 2021, 60(3): 2857-2864.

[9] XIAO J, WANG S M, WANG S, et al. Numerical study on forced convection heat transfer across a heated circular tube based on bingham model with thermally dependent viscosity[J]. Journal of heat transfer, 2021, 143(2): 021801.

[10] YAKUSHIN I G. Description of turbulence in the Burgers model[J]. Radiophysics and quantum electronics, 1981, 24(1): 41-48.

[11] MOISEEV S S, TOOR A V, YANOVSKY V V. The decay of turbulence in the burgers model[J]. Physica d: nonlinear phenomena, 1981, 2(1): 187-193.

[12] 刘新喜，李盛南，徐泽佩，等. 高应力泥质粉砂岩黏弹塑性蠕变模型[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2019, 50(5): 1210-1220.
LIU Xinxi, LI Shengnan, XU Zepei, et al. Viscoelastic-plastic creep model of high stress argillaceous siltstone[J]. Journal of Central South University (science and technology), 2019, 50(5): 1210-1220(in Chinese).

[13] 张亮亮，王晓健. 改进宾汉姆流变模型及其参数辨识[J]. 力学与实践，2017，39(6)：602-605.
ZHANG Liangliang，WANG Xiaojian. Improved Bingham rheological model and its parameter identification[J]. Mechanics in engineering，2017，39(6)：602-605(in Chinese).

[14] 汪妍妍，盛冬发. 岩石非线性黏弹塑性蠕变模型研究[J]. 应用力学学报，2020，37(2)：689-694.
WANG Yanyan，SHENG Dongfa. Investigation on nonlinear viscoelasto-plastic creep model of rocks [J]. Chinese journal of applied mechanics，2020，37(2)：689-694(in Chinese).

[15] 王游，卢小雨，翟国良. 基于西原体模型的非定常岩石蠕变模型[J]. 科学技术与工程，2022，22(2)：676-682.
WANG You，LU Xiaoyu，ZHAI Guoliang. Non-stationary creep model for rock based on Nishihara model[J]. Science technology and engineering，2022，22(2)：676-682(in Chinese).

[16] 梁荣康，张庆军，张成，等. 前海软土蠕变特性试验及模型参数研究[J]. 岩土工程学报，2021，43(增刊2)：133-136.
LIANG Rongkang，ZHANG Qingjun，ZHANG Cheng，et al. Creep characteristics and model parameters of Qianhai soft soil[J]. Chinese journal of geotechnical engineering，2021，43(S2)：133-136 (in Chinese).

[17] 赵晨阳，雷明锋，贾朝军，等. 含软弱结构面岩体蠕变力学模型[J]. 中南大学学报(自然科学版)，2021，52(10)：3541-3549.
ZHAO Chenyang，LEI Mingfeng，JIA Chaojun，et al. Creep mechanical model of rock mass with weak structural plane[J]. Journal of Central South University(science and technology)，2021，52(10)：3541-3549(in Chinese).

[18] 张佳. 考虑强度参数劣化的砂岩非定常蠕变模型研究[J]. 应用力学学报，2021，38(3)：1144-1151.
ZHANG Jia. Research on unsteady creep model of sandstone considering strength parameter deterioration[J]. Chinese journal of applied mechanics，2021，38(3)：1144-1151(in Chinese).

[19] 钟祖良，王南云，任玉琪，等. 高地应力下花岗质片麻岩蠕变损伤模型研究[J]. 地下空间与工程学报，2021，17(3)：759-767.
ZHONG Zuliang，WANG Nanyun，REN Yuqi，et al. Creep damage model of granitic gneiss under high ground stress[J]. Chinese journal of underground space and engineering，2021，17(3)：759-767 (in Chinese).

[20] 杨珂，韩超，刘校麟. 分级加卸载下砂岩蠕变试验及模型研究[J]. 长江科学院院报，2021，38(3)：97-102.
YANG Ke，HAN Chao，LIU Xiaolin. Creep experiments and theoretical model on sandstone under step loading and unloading[J]. Journal of Yangtze River Scientific Research Institute，2021，38 (3)：97-102(in Chinese).

[21] 刘长明，张红，晏祥智，等. 隧道围岩的黏弹塑蠕变模型及参数劣化分析[J]. 应用力学学报，2020，37(6)：2341-2347.
LIU Changming，ZHANG Hong，YAN Xiangzhi，et al. Viscoelastic-plastic creep model and parameter deterioration analysis of tunnel surrounding rock[J]. Chinese journal of applied mechanics，2020，37(6)：2341-2347(in Chinese).

[22] 殷德顺，任俊娟，和成亮，等. 一种新的岩土流变模型元件[J]. 岩石力学与工程学报，2007，26(9)：1899-1903.
YIN Deshun，REN Junjuan，HE Chengliang，et al. A new rheological model element for geomaterials[J]. Chinese journal of rock mechanics and engineering，2007，26(9)：1899-1903(in Chinese).

[23] MANDELBROT B B，WHEELER J A. The fractal geometry of nature[J]. American journal of physics，1983，51(3)：286-287.

[24] JIANG Y R，WEI Z C，LU J P. The nonemptiness and compactness of mild solution sets for Riemann-Liouville fractional delay differential variational inequalities[J]. Acta mathematica scientia，2021，41(5)：1569-1578.

[25] MAHMUDOV E N，YUSUBOV S S. Nonlocal boundary value problems for hyperbolic equations with a Caputo fractional derivative [J]. Journal of computational and applied mathematics，2021，398：113709.

[26] PRASAD S A. Riemann-liouville fractional calculus of blancmange curve and cantor functions[J]. Journal of applied mathematics and computation，2020，4(4)：123-129.

[27] 刘汉卿，李新刚，聂晓鹏，等. 周期荷载下岩石改进分数阶西原疲劳本构模型研究[C]//2017 年第二届 AASRI 工业电子与应用国际会议论文集(IEA 2017). 新加坡：新加坡管理与体育科学研究所，2017：103-110.

[28] 刘汉卿，浦少云，刘西金，等. 周期荷载下岩石分数阶黏弹塑性本构模型研究[J]. 长江科学院院报，2018，35(9)：127-132.
LIU Hanqing，PU Shaoyun，LIU Xijin，et al. Fractional-order viscoelasto-plastic constitutive model for rock under cyclic loading[J]. Journal of Yangtze River Scientific Research Institute，2018，35 (9)：127-132(in Chinese).

[29] 王宇. 砂岩单轴压缩蠕变试验及对西原本构模型的改进[J]. 兰州工业学院学报，2020，27(5)：10-14.
WANG Yu. Study on uniaxial compression creep test of sandstone and improvement of Nishihara model[J]. Journal of Lanzhou Institute of Technology，2020，27(5)：10-14(in Chinese).

[30] 赵宝云，刘东燕，郑颖人，等. 红砂岩单轴压缩蠕变试验及模型研究[J]. 采矿与安全工程学报，2013(5)：744-747.
ZHAO Baoyun，LIU Dongyan，ZHENG Yingren，et al. Uniaxial compressive creep test of red sandstone and its constitutive model [J]. Journal of mining and safety engineering，2013(5)：744-747 (in Chinese).

（编辑　李坤璐）